Τελική Εξέταση-Απειροστικός Λογισμός II, 20/09/2023

Διδάσκοντες: Ελευθέριος Νικολιδάκης-Χρήστος Σαρόγλου
Απαντήσεις χωρίς αιτιολόγηση δεν βαθμολογούνται.

Θέμα 1ο.

i) [0.75 μον.] Έστω ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει. Να δειχθεί ότι

$$\lim_n \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$$

ii) [1.0 μον.] Να εξεταστούν ως προς τη σύγλιση οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right)$, $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^3}$.

iii) [0.75 μον.] Να βρεθούν όλα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{4k+3}$ συγκλίνει.

Θέμα 2ο.

i) [1.25 μον.] Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ και $f : A \to \mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αν $\{x_n\}$ είναι μία βασική (Cauchy) ακολουθία, τέτοια ώστε $x_n \in A$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να δειχθεί ότι η ακολουθία $\{f(x_n)\}$ είναι βασική.

ii) [1.25 μον.] Να δειχθεί ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι ομοιόμορφα συνεχείς

$$f(x) = e^x,\ x \in [-\infty, 3), \qquad g(x) = \frac{e^x - 1}{x},\ x \in (0, 3].$$

Θέμα 3ο.

i) [1.25 μον.] Δίνεται η συνάρτηση $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} \pi & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ -4, & x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \\ x^2 - 1, & x \in (1,2] \end{cases}$. Να εξετάσετε αν η f είναι ολοκληρώσιμη στο διάστημα $[0,2]$.

ii) [1.25 μον.] Με αποκλειστική χρήση του ορισμού του ολοκληρώματος και του κριτηρίου ολοκληρωσιμότητας του Riemann, να δειχθεί ότι η συνάρτηση $f(x) = x$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και να αποδειχθεί ότι

$$\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{2}.$$

Θέμα 4ο.

i) [0.75 μον.] Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις, με $g(x) > 0$, για κάθε $x \in [a,b]$. Να δειχθεί ότι υπάρχει $\xi \in [a,b]$, τέτοιο ώστε

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

ii) [1.0 μον.] Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα

$$\int \frac{1}{(x+2)(x-3)^2}dx, \qquad \int_0^{\pi/2} e^x \cos(3x)dx$$

iii) [0.75 μον.] Εξετάστε ως προς τη σύγκλιση το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} \frac{e^{-2x}+2}{x^2+4}\,dx$.